26/05 : Tutorato Analisi II

Esercizio $r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizz. di γ

$r(t) = (x(t), z(t))$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = \sin(\pi t) \end{cases}$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il sostegno di γ attorno all'asse x.

Soluzione

Il sostegno di γ è l'insieme

$$\{(x(t), z(t)) \mid t \in [0,1]\} = \{(t, \sin(\pi t)) \mid t \in [0,1]\}$$

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

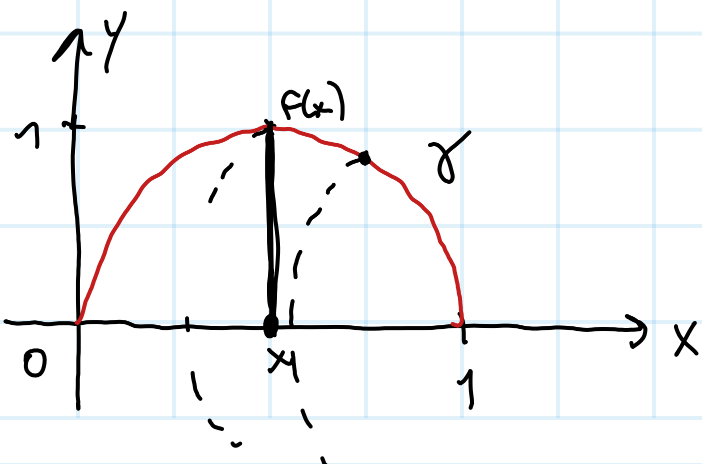
$f(x) = \sin(\pi x)$

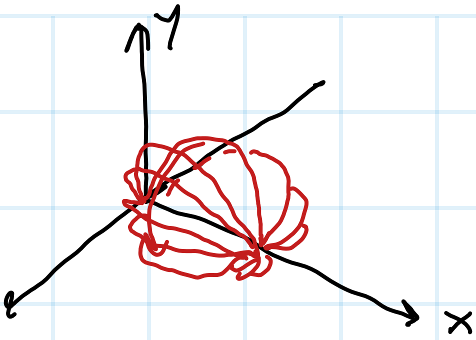
Grafico di f

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} =$$

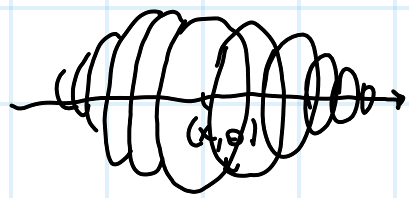
$$= \{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\} =$$

$$= \{(x, \sin(\pi x)) \mid x \in [0,1]\}$$





$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi \left(f(x)\right)^2}_{\text{area del cerchio di centro } (x,0) \text{ e raggio } f(x)} dx$$



$$V = \pi \int_0^1 \sin^2(\pi t)\, dt = \circledast$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\[2ex] \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \end{array} \right]$$

$$\circledast = \pi \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi t)}{2}\, dt =$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{2}\, dt - \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(t \Big|_0^1 \right) - \frac{\cancel{\pi}}{2}\,\frac{1}{2\cancel{\pi}} \int_0^1 2\pi \cos(2\pi t)\, dt =$$

$\sin(2\pi t)$

deriv $\cos(2\pi t) \cdot 2\pi$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\, \cancel{\sin(2\pi t)} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \,.$$

6. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale $\mathbf{F}_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}_\alpha(x,y) = \left(4x^3 \sin(xy) + yx^4 \cos(xy)\ ,\ \alpha x^5 \cos(xy)\right)$$

è conservativo.

F_α conservativo $\Longrightarrow$ F_α IRROTAZIONALE

(cioè $\operatorname{rot} F_\alpha = 0$)

scrittura FORMALE !

$$\operatorname{rot} F_\alpha \overset{\shortparallel}{=} \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (F_\alpha)_1 & (F_\alpha)_2 & (F_\alpha)_3 \end{pmatrix} \overset{\shortparallel}{=}$$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial F_3}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial z} F_2}\ ,\ \cancel{\frac{\partial}{\partial z} F_1} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x} F_3}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha x^5 \cos(xy)\right) =$$

$$= \alpha\left(\underline{5x^4} \cdot \underline{\cos(xy)} - \underline{x^5 \cdot \sin(xy)\, \overset{\frac{\partial}{\partial x}(xy)}{\widetilde{y}}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3 \sin(xy) + y x^4 \cos(xy)\right) =$$

$$= 4x^4\cos(xy) + x^4\cos(xy) +$$
$$- x^5 y \sin(xy)$$

$$= \underline{5x^4\cos(xy)} - \underline{x^5 y\sin(xy)}$$

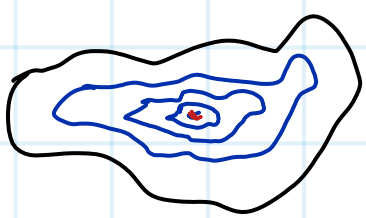
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = (\alpha - 1)\left(5x^4\cos(xy) - x^5 y \sin(xy)\right)$$

Se $\alpha = 1$, allora $\operatorname{rot} F_\alpha = (0,0,0)$.

$\operatorname{rot} F_\alpha = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff \alpha = 1$.

$\mathbb{R}^2$

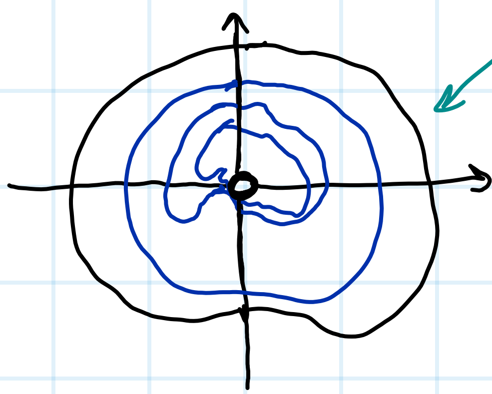
SEMPLICEM. CONNESSO



ogni curva (SEMPLICE e CHIUSA) si può contrarre a un punto tramite una deformazione continua

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

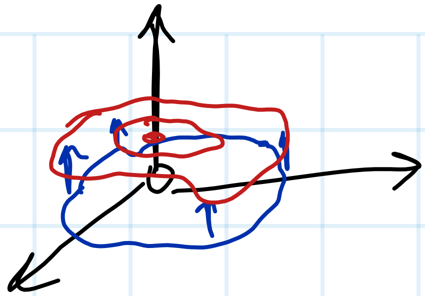
NON SEMPLICEM. CONNESSO



non riesco a deformarla in modo continuo DENTRO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fino a contrarla a un punto

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

SEMPLICEM. CONNESSO



Dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si ha che F_α è CONSERVATIVO se e solo se $\alpha = 1$.

STRATEGIA GENERALE

$F: D \to \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$ campo vettoriale. $D \subseteq \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$

Stabilire se F è conservativo:

1) Calcolo $\operatorname{rot} F$

- $\equiv 0 \ (\forall x \in D) \rightsquigarrow 2)$ — è il vettore nullo
- $\not\equiv 0 \rightsquigarrow F$ NON è CONSERVATIVO

2) $\operatorname{rot} F \equiv 0$: guardo il dominio D :

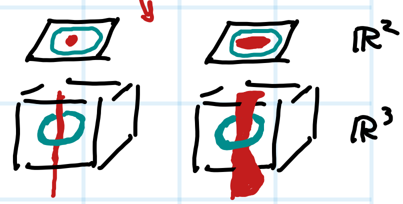
D → SEMPLICEMENTE CONNESSO ⇝ F è conservativo

D → NON È SEMPL. CONNESSO ⇝ 3)

3) $\mathrm{rot}\, F \equiv 0$ e D NON semplicemente connesso.

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$$ con γ chiusa intorno a "un buco" di D

Esempi "tipici": $\begin{cases} \text{in } \mathbb{R}^2 : \text{punti} \\ \text{in } \mathbb{R}^3 : \text{rette} \end{cases}$



$\neq 0$ ⇝ F non è conservativo

$= 0$ ⇝ si cerca un potenziale → "ci sono buone possibilità che sia conservativo"

Un potenziale per F è una funzione

$U : D \to \mathbb{R}$ tale che

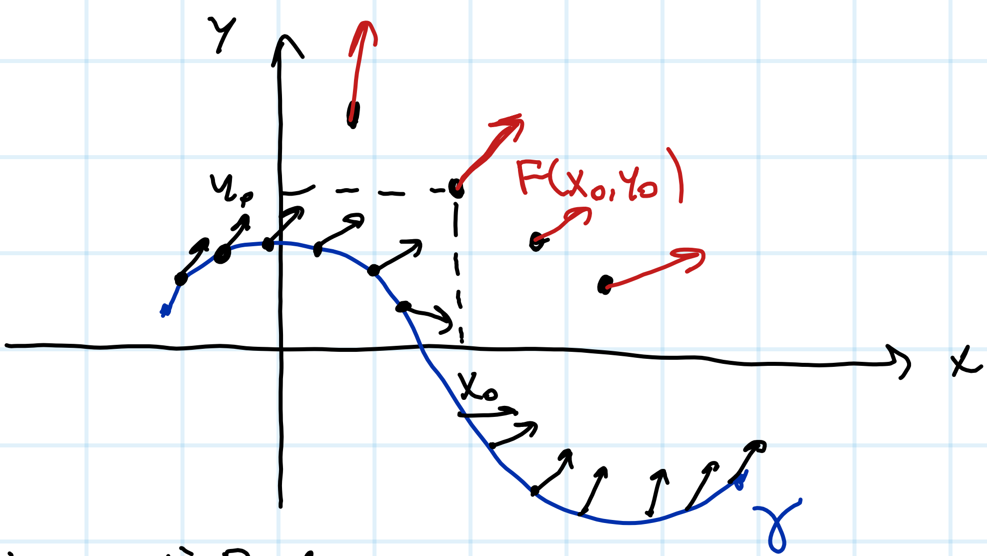
$$F = \nabla U .$$

Lavoro di un campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

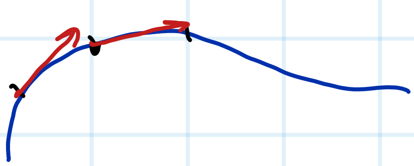
γ curva piana parametrizzata da

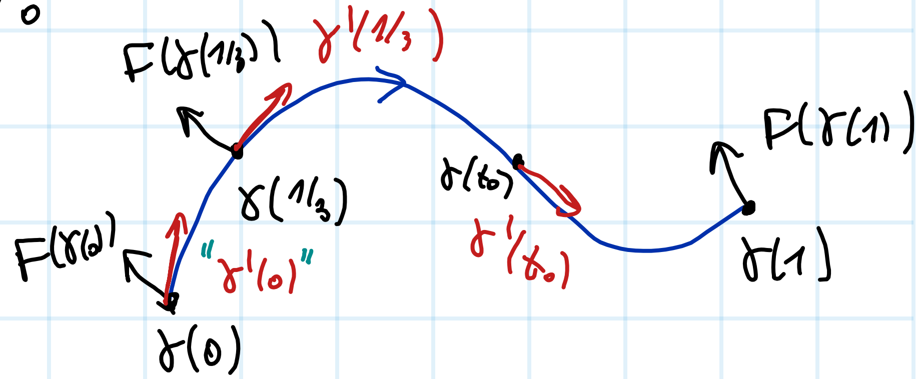
$$r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$



Lavoro di F lungo γ

$$\mathcal{L} = \int_\gamma F \cdot dr = \int_0^1 F(\underline{\gamma(t)}) \cdot \gamma'(t)\, dt$$



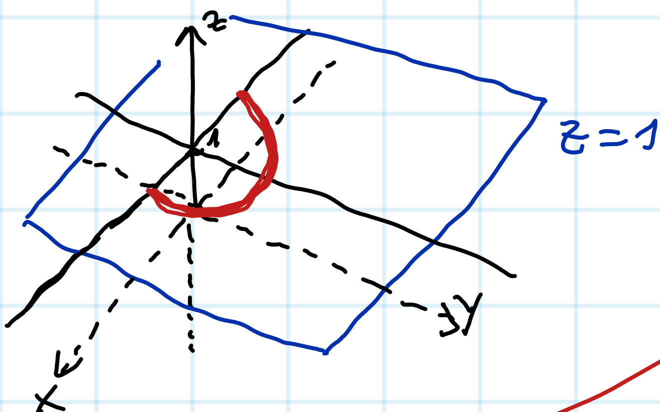


6. Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

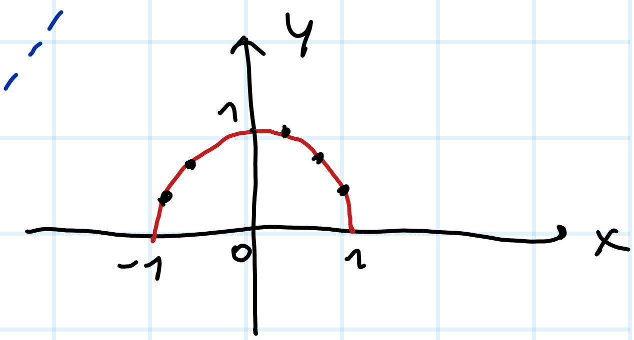
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(ze^x \,,\, ze^y \,,\, xye^z\right))$$

lungo la semicirconferenza $\gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z = 1 \,,\; y \geq 0 \right\}$ percorsa in senso antiorario.

$$\gamma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x^2+y^2 = 1 = z} \,,\, \underline{y \geq 0} \}$$



fatto questo, possiamo leggere il tutto nel piano xy



$$\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$F(x,y,z) = (z e^x \,,\; z e^y \,,\; xy e^z)$$

$$F(\gamma(\theta)) = F(\cos\theta, \sin\theta, 1) =$$

$$= (e^{\cos\theta}, e^{\sin\theta}, \cos\theta \sin\theta \cdot e)$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(e^{\cos\theta}, e^{\sin\theta}, \cancel{\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot e} \right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-e^{\cos\theta} \sin\theta + e^{\sin\theta} \cos\theta \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \left((\cos\theta)' \, e^{\cos\theta} + (\sin\theta)' \, e^{\sin\theta} \right) d\theta =$$

$$= e^{\cos\theta} \Big|_0^{\pi} + e^{\sin\theta} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left(e^{-1} - e^{1} \right) + \left(e^{0} - e^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{e} - e .$$